

## 单元素养测评卷(一) A

## 第四章

时间:120分钟 分值:150分

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 + 2$ ,则123是该数列的 ( )  
 A. 第9项                      B. 第10项  
 C. 第11项                      D. 第12项
2. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_3 + a_9 = 4a_5$ , $a_2 = -6$ ,则该数列的公差是 ( )  
 A. 3                              B.  $\frac{1}{4}$   
 C. -4                              D. -14
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ,且当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \begin{cases} 2a_{n-1} - 1, & n \text{ 为偶数,} \\ 2a_{n-1} + 2, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$ 则 $a_4 =$  ( )  
 A. 7                              B. 10  
 C. 12                              D. 22
4. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} < a_n$ , $a_2 \cdot a_8 = 6$ , $a_4 + a_6 = 5$ ,则 $\frac{a_5}{a_7} =$  ( )  
 A.  $\frac{5}{6}$                       B.  $\frac{6}{5}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{3}{2}$
5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2m+1$ ( $m \in \mathbf{N}^*$ ),其中奇数项之和为140,偶数项之和为120,则 $m =$  ( )  
 A. 6                              B. 7  
 C. 12                              D. 13

6. [2024·福建莆田二中高二月考] 已知 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 成等比数列,且2和8为其中的两项,则 $a_5$ 的最小值为 ( )  
 A. -64                              B. -16  
 C.  $\frac{1}{64}$                               D.  $\frac{1}{16}$
7. 在数列 $\{a_n\}$ 中,若存在不小于2的正整数 $k$ ,使得 $a_k < a_{k-1}$ 且 $a_k < a_{k+1}$ ,则称数列 $\{a_n\}$ 为“ $k$ -数列”.下列数列中为“ $k$ -数列”的是 ( )  
 A.  $b_n = n$                               B.  $b_n = 2^n$   
 C.  $b_n = n + \frac{9}{n}$                               D.  $b_n = \frac{1}{2n-1}$
8. [2024·南京航空航天大学附中高二月考] 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$ ( $n \in \mathbf{N}^*$ , $d$ 为常数),则称 $\{a_n\}$ 为“比等差数列”.已知在“比等差数列” $\{a_n\}$ 中, $a_1 = a_2 = 1$ , $a_3 = 2$ ,则 $\frac{a_{2026}}{a_{2024}}$ 的末位数字是 ( )  
 A. 0                              B. 2  
 C. 4                              D. 6
- 二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.
9. 已知数列 $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \dots$ ,则下列说法正确的是 ( )  
 A. 此数列的通项公式是 $\sqrt{3n-1}$   
 B.  $5\sqrt{2}$ 是它的第17项  
 C. 此数列的通项公式是 $\sqrt{3n+1}$   
 D.  $5\sqrt{2}$ 是它的第18项

10. [2024·安徽滁州高二期末] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ,公差 $d > 0$ ,且 $S_{18} = S_{25}$ ,则下列说法正确的是 ( )  
 A.  $a_1 < 0$   
 B.  $a_1 + a_{43} = 0$   
 C. 当 $S_n$ 取得最小值时, $n$ 的值为22  
 D. 当 $S_n > 0$ 时, $n$ 的最小值为44
11. [2024·河南洛阳高二期末] 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$ , $a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$ ( $n \in \mathbf{N}^*$ ),数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ,且 $b_n = 1 + \frac{2}{3}S_n$ ( $n \in \mathbf{N}^*$ ),则下列说法正确的是 ( )  
 A.  $\frac{1}{2023}$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的项  
 B. 数列 $\{b_n\}$ 是首项为3,公比为3的等比数列  
 C. 数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n < \frac{1}{4}$   
 D. 数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和 $A_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^{n+1}}{2} + \frac{3}{2}$
- 三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.
12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n}{n^2+5}$ ,则 $a_5 + a_{10} =$  \_\_\_\_\_.
13. [2024·河北邢台质检联盟高二月考] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ,若 $\frac{S_6}{S_3} = 5$ ,则 $\frac{S_9}{S_3} =$  \_\_\_\_\_.
14. [2024·江苏启东高二期中] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ , $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n - 3, & n \text{ 是奇数,} \\ 2a_n, & n \text{ 是偶数,} \end{cases}$ 则 $\frac{b_{n+1}}{b_n} =$  \_\_\_\_\_,数列 $\{a_n\}$ 的前20项和 $S_{20} =$  \_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13分)[2024·长沙明德中学高二月考] 在等比数列 $\{a_n\}$

$$\text{中}, a_1 + a_2 = 5a_2 = \frac{5}{4}.$$

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)求数列 $\left\{\frac{3}{4}a_n + 2n - 1\right\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ .

16. (15分)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前3项和是24,前5项和是30.

(1)求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2)若 $T_n$ 是 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,则 $T_n$ 是否存在最大值?若存在,求 $T_n$ 的最大值及取得最大值时 $n$ 的值;若不存在,请说明理由.

17. (15分)[2024·安徽马鞍山高二期中] 已知数列 $\{a_n\}$ 的首

$$\text{项 } a_1 = \frac{2}{3}, \text{ 且 } \{a_n\} \text{ 满足 } a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}.$$

(1)求证:数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 为等比数列;

(2)设 $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n}$ ,求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n}$ .

18. (17分)某高科技企业研制出一种型号为A的精密数控车床,A型车床为企业创造的价值逐年减少.若第1年A型车床创造的价值是250万元,且第1年至第6年,每年A型车床创造的价值减少30万元;从第7年开始,每年A型车床创造的价值是上一年的50%.现用 $a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ (单位:万元)表示A型车床在第 $n$ 年创造的价值.

(1)求数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的通项公式.

(2)记 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, $T_n = \frac{S_n}{n}$ ,企业经过成本核算,若 $T_n > 100$ ,则继续使用A型车床,否则更换A型车床,试问该企业应在第几年年初更换A型车床?

19. (17分)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_1-2}{a_1} \cdot \frac{a_2-2}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n-2}{a_n} = \frac{1}{a_n}$ .

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设数列 $\left\{\frac{1}{a_n^2 - 1}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ,若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ,都有 $S_n < \lambda^2 - 2\lambda - 1$ 成立,求满足条件的最小正整数 $\lambda$ 的值.